

## 第七章 Brown 运动

### 1 Brown 运动的定义及基本性质

- Brown 运动的基本定义
- Brown 运动的性质
- \* Brown 桥

### 2 Brown 运动的其他性质

- 击中时与最大值变量
- 反正弦律

### 3 粗糙轨道

- 何谓粗糙轨道
- 二次变差



(考虑对称随机游动, 假设每隔  $\Delta t$  时间等概率地向左或向右移动一个步长  $\Delta x$ , 每次移动相互独立.)

引例. 记  $X_n$  表示粒子在第  $n$  次运动的方向,  $t$  时刻粒子的位置

$$X(t) := (X_1 + \cdots + X_{[t/\Delta t]}) \cdot \Delta x, \quad t \geq 0,$$

则

$$\mathbb{E}X(t) = 0, \quad \mathbb{D}X(t) = (\Delta x)^2 \left[ \frac{t}{\Delta t} \right].$$

令  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0 : \Delta x = c\sqrt{\Delta t}$ ,

$$\mathbb{D}(X(t)) \rightarrow c^2 t.$$

根据对称随机游动可以推出的一些简单性质:

- ① 由中心极限定理,  $X(t) \sim N(0, c^2 t)$ . 进一步的,
- ②  $\{X(t), t \geq 0\}$  是平稳独立增量过程:

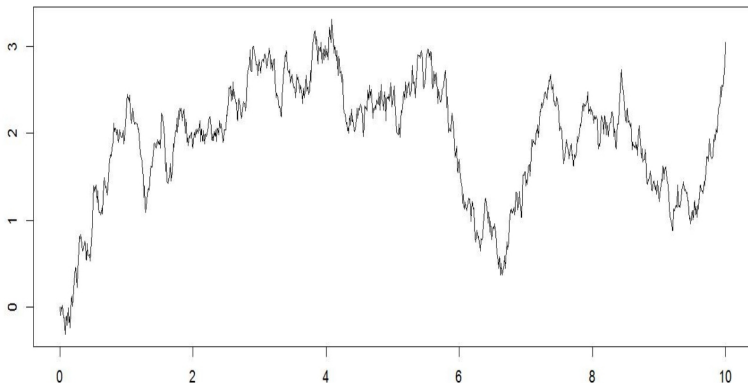
$$X(t) - X(s) \sim N(0, c^2(t-s)), \quad t > s.$$



## 一维 BM 的样本轨道

几乎每条样本轨道是连续的, 并且几乎点点不可导(见后).

标准布朗运动的一条样本轨道



### 定义 7.1.1:

若  $\{X(t), t \geq 0\}$  满足

- (1)  $X(t)$  是独立增量过程;
- (2) 对任意  $s, t > 0$ ,  $X(s+t) - X(s) \sim N(0, c^2 t)$ ;
- (3)  $X(t)$  是关于  $t$  的连续函数.

则称  $\{X(t), t \geq 0\}$  为 Brown 运动或 Wiener 过程.

特别的, 当  $c = 1$  时, 称  $\{X(t), t \geq 0\}$  为标准 Brown 运动.  
此时, 若  $X(0) = 0$ , 则  $X(t) \sim N(0, t)$ , 相应密度为

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}.$$

实际上, 若  $c \neq 1$ , 则可考虑标准 Brown 运动  $\{X(t)/c, t \geq 0\}$ .



下面均讨论标准 Brown 运动.

例 7.1.1:

假设  $\{X(t), t \geq 0\}$  是一维 Brown 运动, 求:

- (1)  $X(1) + 3X(2)$  的分布;
- (2)  $\text{Cov}(X(1) + X(3), X(3) - X(2))$ ;
- (3)  $\mathbb{P}(X(7) \leq 3 | X(1) = 1, X(3) = 2)$ .



## Brown 运动的概率性质

### 定理 7.2.2

Brown 运动是一个 Markov 过程.

事实上, 对于  $0 \leq s, t$ ,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X(t+s) \leq a | X(s) = x, X(v) = x_v, 0 \leq v < s) \\ &= \mathbb{P}(X(t+s) - X(s) \leq a - x | X(s) = x, X(v) = x_v, 0 \leq v < s) \\ &= \mathbb{P}(X(t+s) - X(s) \leq a - x | X(s) = x) \\ &= \mathbb{P}(X(t+s) \leq a | X(s) = x). \end{aligned}$$

第二个等号是因为  $X(t+s) - X(s)$  与时刻  $v \in [0, s]$  的位置  $X(v)$  独立. □



## 有限维分布

### 定理 7.2.3

对任意  $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ ,  $(X(t_1), \cdots, X(t_n))$  的联合密度为

$$f_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{t_i - t_{i-1}}(x_i - x_{i-1}).$$

其中  $f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$ ,  $x_0 = 0$ .



证. (对  $n$  用数学归纳法) 当  $n = 2$  时, 由 Markov 性和平稳性,

$$\mathbb{P}(X(t_2) \leq x_2 | X(t_1) = x_1) = \mathbb{P}(X(t_2) - X(t_1) \leq x_2 - x_1),$$

给定  $X(t_1) = x_1$ ,  $X(t_2)$  的条件密度

$$f_{t_2}(x_2 | X(t_1) = x_1) = f_{t_2-t_1}(x_2 - x_1).$$

所以由条件密度的性质,

$$f_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = f_{t_2}(x_2 | X(t_1) = x_1) f_{t_1}(x_1) = f_{t_1}(x_1) f_{t_2-t_1}(x_2 - x_1).$$



设  $n = k$  时原式成立, 同理

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X(t_{k+1}) \leq x_{k+1} | X(t_k) = x_k, X(t_j) = x_j, 1 \leq j \leq k-1) \\ &= \mathbb{P}(X(t_{k+1}) - X(t_k) \leq x_{k+1} - x_k | X(t_k) = x_k) \\ &= \mathbb{P}(X(t_{k+1}) - X(t_k) \leq x_{k+1} - x_k). \end{aligned}$$

$$\therefore f_{t_{k+1}}(x_{k+1} | X(t_j) = x_j, 1 \leq j \leq k-1) = f_{t_{k+1}-t_k}(x_{k+1} - x_k).$$

从而

$$\begin{aligned} & f_{t_1, \dots, t_{k+1}}(x_1, \dots, x_{k+1}) \\ &= f_{t_1, \dots, t_k}(x_1, \dots, x_k) f_{t_{k+1}}(x_{k+1} | X(t_j) = x_j, 1 \leq j \leq k-1) \\ &= f_{t_1}(x_1) f_{t_2-t_1}(x_2 - x_1) \cdots f_{t_{k+1}-t_k}(x_{k+1} - x_k). \end{aligned}$$



例 7.2.1 对任意  $s < t$ , 求  $X(s)|X(t) = B$  的分布, 其中  $B$  是任意实数. 事实上, 因为

$$\begin{aligned} f_{s|t}(x|B) &= \frac{f_s(x)f_{t-s}(B-x)}{f_t(B)} = c_1 \exp\left\{-\frac{x^2}{2s} - \frac{(B-x)^2}{2(t-s)}\right\} \\ &= c_2 \exp\left\{-\frac{t(x - Bs/t)^2}{2s(t-s)}\right\}, \end{aligned}$$

所以条件分布也是正态分布. 相应的

$$\mathbb{E}[X(s)|X(t) = B] = Bs/t,$$

$$\mathbb{D}(X(s)|X(t) = B) = s(t-s)/t.$$

方差不依赖于  $B$ , 即如果  $s/t = \alpha \in (0, 1)$ , 则

$$X(s)|X(t) \sim N(\alpha X(t), \alpha(1-\alpha)t).$$



## Gauss 过程

### 定义 7.2.1:

若过程  $\{X(t), t \in T\}$  对任意  $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ ,

$$(X(t_1), \cdots, X(t_n))$$

的联合分布为  $n$  维正态分布, 则称  $\{X(t), t \in T\}$  为 Gauss 过程.

- 注.
- ① Gauss 过程的概率性质由均值函数和协方差函数完全确定.
  - ② 显然, Brown 运动是 Gauss 过程.



判断Gauss 过程为 Brown 运动的充要条件.

定理 7.2.4:

设  $\{B(t), t \geq 0\}$  是轨道连续的 Gauss 过程,  $B(0) = 0$  且

$$\mathbb{E}B(t) = 0, \quad \mathbb{E}[B(s)B(t)] = t \wedge s \quad (\forall s, t > 0), \quad (A)$$

则  $\{B(t), t \geq 0\}$  是 Brown 运动. 反之亦然.



证. (充分性) 若  $B$  为 Brown 运动, 则  $B$  为 Gauss 过程. 由 Brown 运动的定义可知, 轨道连续且  $\mathbb{E}B(t) = 0$ . 令  $0 < s \leq t$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B(t)B(s)] &= \mathbb{E}[(B(t) - B(s) + B(s))B(s)] \\ &= \mathbb{E}[B(t) - B(s)]\mathbb{E}[B(s)] + s = s\end{aligned}$$

所以,  $\mathbb{E}[B(t)B(s)] = t \wedge s$ .



(必要性) 若  $B$  是 Gauss 过程且满足 (A) 式, 则对任意  $s, t > 0$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B(t) - B(s)] &= \mathbb{E}[B(t)] - \mathbb{E}[B(s)] = 0, \\ \mathbb{E}[B(t) - B(s)]^2 &= \mathbb{E}B^2(t) + \mathbb{E}B^2(s) - 2\mathbb{E}[B(t)B(s)] \\ &= t + s - 2(t \wedge s) = |t - s|.\end{aligned}$$

可得  $B$  是平稳增量的, 而对任意  $s_1 < t_1 < s_2 < t_2$ ,

$$\begin{aligned}& \mathbb{E}[(B(t_1) - B(s_1))(B(t_2) - B(s_2))] \\ &= \mathbb{E}[B(t_1)B(t_2)] - \mathbb{E}[B(t_1)B(s_2)] \\ & \quad - \mathbb{E}[B(s_1)B(t_2)] + \mathbb{E}[B(s_1)B(s_2)] \\ &= t_1 - t_1 - s_1 + s_1 = 0.\end{aligned}$$

故  $B$  是独立增量的, 由假设又是连续轨道的, 所以  $B$  是 BM.  $\square$



由上可以推出 Brown 运动的平移不变性和刻度不变性:

### 推论 7.2.1

若  $\{B(t), t \geq 0\}$  是 Brown 运动,  $a, c > 0$ , 则

- ①  $\{B(t+a) - B(a); t \geq 0\}$  是 Brown 运动;
- ② (自相似性)  $\{B(ct)/\sqrt{c}; t \geq 0\}$  是 Brown 运动.



### 定理 7.2.5:(0 与 $\infty$ 的对称性)

设  $\tilde{X}(t) := \begin{cases} tX(1/t), & t > 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$  则  $\{\tilde{X}(t), t \geq 0\}$  是 BM.

证. 易证  $\{\tilde{X}(t), t \geq 0\}$  是 Gauss 过程, 且  $\forall t, s \geq 0$

$$\mathbb{E}[\tilde{X}(t)] = 0, \quad \mathbb{E}[\tilde{X}(t)\tilde{X}(s)] = t \wedge s.$$

往证:  $\lim_{t \downarrow 0} \tilde{X}(t) = 0$  a.s..



事实上,

$$\tilde{F} := \{\lim_{t \downarrow 0} \tilde{X}(t) = 0\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{t \in \mathbb{Q} \cap (0, 1/n)} \{|\tilde{X}(t)| < 1/m\},$$

$$F := \{\lim_{t \downarrow 0} X(t) = 0\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{t \in \mathbb{Q} \cap (0, 1/n)} \{|X(t)| < 1/m\},$$

因为  $\{\tilde{X}(t), t \geq 0\}$  与  $\{X(t), t \geq 0\}$  有相同的有限维分布, 所以

$$\mathbb{P}(\tilde{F}) = \mathbb{P}(F) = 1.$$

□



### 引理 7.2.1:

$$\mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} X(t) = \infty) = 1.$$

证. 令  $Z := \sup_{t \geq 0} X(t)$ , 由 Brown 运动的自相似性,

对任何  $c > 0$ ,  $cZ$  与  $Z$  同分布,

从而

$$\mathbb{P}(Z \in (0, u)) = \mathbb{P}(cZ \in (0, u)) = \mathbb{P}(Z \in (0, u/c)),$$

由  $c$  的任意性, 有  $\mathbb{P}(Z \in (0, u)) = 0$ , 所以

$$\mathbb{P}(Z \in \{0, \infty\}) = 1.$$



证. (续) 因为

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = 0) &= \mathbb{P}(X(t) \leq 0, \forall t \geq 0) \\ &\leq \mathbb{P}(X(1) \leq 0, \sup_{t \geq 0} (X(t+1) - X(1)) = 0) \\ &= \mathbb{P}(X(1) \leq 0) \mathbb{P}(Z = 0) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(Z = 0),\end{aligned}$$

所以  $\mathbb{P}(Z = 0) = 0$ , 即

$$\mathbb{P}(Z = \infty) = 1.$$



## 定理 7.2.6:

$$\mathbb{P}(\limsup_{t \rightarrow \infty} X(t) = \infty, \liminf_{t \rightarrow \infty} X(t) = -\infty) = 1.$$

证. 存在  $\Omega_0$  使得  $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$  且对任意  $\omega \in \Omega_0$ ,

$X(t, \omega)$  是关于  $t$  的连续函数且  $\sup_{t \geq 0} X(t, \omega) = \infty$ .

$\therefore t > 0, \sup_{u \leq t} X(u, \omega) < \infty$ , 即  $\sup_{u > t} X(u, \omega) = \infty$ .

$$\therefore \mathbb{P}(\limsup_{t \rightarrow \infty} X(t) = \infty) = 1.$$

而  $\{-X(t), t \geq 0\}$  也是 BM,

$$\therefore \mathbb{P}(\liminf_{t \rightarrow \infty} X(t) = -\infty) = 1. \quad \square$$

注. 一维 Brown 运动是常返的, 以概率 1 可达任何点.



Brown 桥是一类由 Brown 运动定义的另一个非常重要的过程.

定义 7.2.2:

设  $\{X(t), t \geq 0\}$  是 Brown 运动, 则称条件随机过程

$$\{X(t), 0 \leq t \leq 1 | X(1) = 0\}$$

为 Brown 桥. 该过程同时在  $0, 1$  时刻被固定在  $0$  点.

注. Brown 桥可定义为均值为  $0$ , 协方差函数为  $s(1-t)$  ( $s < t$ ) 的 Gauss 过程.



如下命题告诉我们获得 Brown 桥的方法.

命题 7.2.1:

若  $\{X(t), t \geq 0\}$  是 Brown 运动, 令  $Z(t) := X(t) - tX(1)$ , 则  $\{Z(t), 0 \leq t \leq 1\}$  是 Brown 桥.

证. 只需证  $\mathbb{E}Z(t) = 0$  及  $\text{Cov}(Z(s), Z(t)) = s(1-t)$  ( $s < t$ ).  
前者显然.

$$\begin{aligned}\text{Cov}(Z(s), Z(t)) &= \text{Cov}(X(s) - sX(1), X(t) - tX(1)) \\ &= \text{Cov}(X(s), X(t)) - t\text{Cov}(X(s), X(1)) \\ &\quad - s\text{Cov}(X(1), X(t)) + st\text{Cov}(X(1), X(1)) \\ &= s - st - st + st = s(1-t).\end{aligned}$$



## Brown 桥在研究经验分布函数时起着关键作用

设  $F \sim U(0, 1)$ ,  $X_1, X_2, \dots$  为 i.i.d. 分布函数为  $F$  的随机序列,  
 $X_1, \dots, X_n$  的经验分布函数

$$F_n(s) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq s\}} \quad (0 < s < 1),$$

则由大数定理, 有

$$\mathbb{P}(F_n(s) \rightarrow F(s) = s) = 1.$$

另一方面, 由 De Moivre-Laplace 局部极限定理, 给定  $s \in [0, 1]$ ,

$$\alpha_n(s) := \sqrt{n}(F_n(s) - s) \sim AN(0, s(1-s)).$$

(此极限分布与  $s$  有关, 但收敛性与  $s$  无关.)



考虑总体分布  $F$  连续,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为简单随机样本, 则  $F(X_1), F(X_2), \dots, F(X_n)$  为 i.i.d.  $U(0, 1)$ -随机序列, 记

$$F_n(s) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{F(X_i) \leq s\}} \quad (0 < s < 1).$$

定义  $\alpha_n = \{\alpha_n(s), 0 \leq s \leq 1\}$ :

$$\alpha_n(s) := \sqrt{n}(F_n(s) - s).$$

### 命题 7.2.2:

$\alpha_n = \{\alpha_n(s), 0 \leq s \leq 1\}$  是一个依分布收敛于 Brown 桥  $B = \{B(t), 0 \leq t \leq 1\}$  的随机过程.



击中时, 亦称首中时

设  $b > 0$ ,

$$T_b := \inf\{t > 0 : X(t) = b\} (> 0).$$

### 引理 7.3.1: (强 Markov 性)

设  $T$  是有限停时, 则

1.  $\{X(t+T) - X(T), t \geq 0\}$  是独立于  $\mathcal{F}_T$  的 Brown 运动.  
特别的,
2. 对任意  $t > 0$  和 Borel 集  $A$ , 有

$$\mathbb{P}(X(t+T) \in A | \mathcal{F}_T) = \mathbb{P}^{X(T)}(X(t) \in A).$$

其中,  $\mathcal{F}_T = \{B \in \mathcal{F}_\infty : B \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ .



注: 在 Markov 链的情形下, Markov 性与强 Markov 性是等价的.

设  $\tau$  是一个停时, 则对任何  $n \geq 0, x \in E, A \subset E$  有

$$\mathbb{P}^x(X_{n+\tau} \in A; \tau < +\infty | \mathcal{F}_\tau) = \mathbb{P}^{X_\tau}(X_n \in A) 1_{\{\tau < +\infty\}}.$$

事实上, 任取  $B \in \mathcal{F}_\tau$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^x(X_{n+\tau} \in A; B \cap \{\tau < \infty\}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}^x(X_{n+\tau} \in A; B \cap \{\tau = k\}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}^x(X_{n+k} \in A; B \cap \{\tau = k\}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}^x(\mathbb{P}^{X_k}(X_k \in A); B \cap \{\tau = k\}) \quad (: k \text{ 时刻的 Markov 性.}) \\ &= \mathbb{E}^x(\mathbb{P}^{X_\tau}(X_n \in A); B \cap \{\tau < \infty\}), \end{aligned}$$



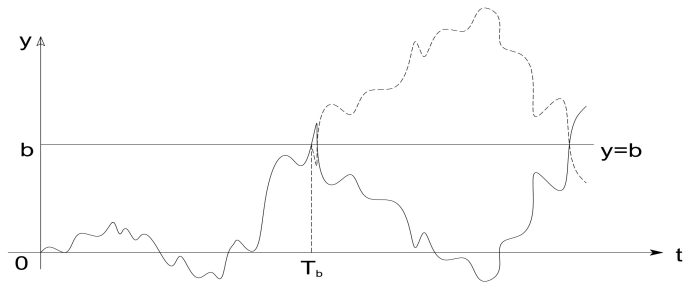
## 定理 7.3.1: (反射原理)

固定实数  $b$ , 令

$$\hat{X}(t) := \begin{cases} X(t), & t < T_b, \\ 2b - X(t), & t \geq T_b, \end{cases}$$

则  $\{\hat{X}(t), t \geq 0\}$  也是 Brown 运动.





证\*. 对  $t \geq 0$ , 令

$$Y(t) := X(t)1_{t \leq T_b}, \quad Z(t) := X(t + T_b) - b.$$

由强 Markov 性,

$Z = \{Z(t), t \geq 0\}$  是独立于  $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$  的 Brown 运动,

$\therefore -Z = \{-Z(t), t \geq 0\}$  是独立于  $Y$  的 Brown 运动

$\therefore (Y, Z)$  与  $(Y, -Z)$  有相同有限维分布. 定义

$$\varphi: (Y, Z) \rightarrow \{Y(t)1_{\{t \leq T_b\}} + (b + Z(t - T_b))1_{\{t > T_b\}}, t \geq 0\}$$

生成一个连续过程,  $\varphi(Y, -Z)$  也是一个连续过程, 且二者具有相同有限维分布. 而

$$\varphi(Y, Z) = X, \quad \varphi(Y, -Z) = \hat{X},$$

所以  $\hat{X}$  也是 Brown 运动.



最大值变量, 亦称为最大游程

$$M_t := \sup\{X(u), u \leq t\}.$$

推论 7.3.1:

(1) 对任意  $b, y, t \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}(M_t \geq b, X(t) \leq b - y) = \mathbb{P}(X(t) \geq b + y);$$

(2)  $M_t$  与  $|X(t)|$  同分布:

$$\mathbb{P}(M_t \geq b) = 2\mathbb{P}(X(t) \geq b), \quad \forall b \geq 0;$$

(3) 对任意  $b \neq 0$ ,

$$f_{T_b}(t) = \frac{|b|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{b^2}{2t}\right\}, \quad t > 0, \text{ 从而 } \mathbb{E}T_b = \infty.$$



证. (1) 对任意  $b, y, t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(M_t \geq b, X(t) \leq b - y) \\ &= \mathbb{P}(\hat{M}_t \geq b, \hat{X}(t) \geq b + y) = \mathbb{P}(\hat{X}(t) \geq b + y) \\ &= \mathbb{P}(X(t) \geq b + y); \end{aligned}$$

(2)  $\forall b > 0$ ,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(M_t \geq b) \\ &= \mathbb{P}(M_t \geq b, X(t) > b) + \mathbb{P}(M_t \geq b, X(t) \leq b) \\ &= 2\mathbb{P}(X(t) \geq b); \end{aligned}$$



(3) 对任意  $b > 0, t > 0$ ,

$$\mathbb{P}(T_b \leq t) = \mathbb{P}(M_t \geq b) = 2(1 - \Phi(b/\sqrt{t})).$$

$$\therefore f_{T_b}(t) = 2\phi(b/\sqrt{t}) \frac{1}{2} \frac{b}{\sqrt{t^3}} = \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{b^2}{2t}\right\}.$$

从而

$$\mathbb{E} T_b = \int_0^\infty \frac{b}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{b^2}{2t}\right\} dt = \infty.$$

□



## 命题 7.3.1:

设  $\bar{0}(t_1, t_2) := \{\nexists t \in (t_1, t_2) : B(t) = 0\}$ , 则

$$\mathbb{P}(\bar{0}(t_1, t_2)) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{t_1}{t_2}}.$$

特别的, 当  $t_1 = xt$ ,  $t_2 = t$ ,  $0 < x < 1$  时,

$$\mathbb{P}(\bar{0}(xt, t)) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}.$$



证. 由 Brown 运动的连续性和对称性

$$\mathbb{P}(0(t_1, t_2) | B(t_1) = x) = \mathbb{P}(T_x \leq t_2 - t_1) = 2(1 - \Phi(\frac{x}{\sqrt{t_2 - t_1}})),$$

从而

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0(t_1, t_2)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(0(t_1, t_2) | B(t_1) = x) \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} e^{-\frac{x^2}{2t_1}} dx \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{t_1(t_2 - t_1)}} \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2(t_2 - t_1)}} dy e^{-\frac{x^2}{2t_1}} dx,\end{aligned}$$



再令

$$x = \sqrt{2t_1}\rho \cos \varphi, \quad y = \sqrt{2(t_2 - t_1)}\rho \sin \varphi \quad (0 < \varphi < \pi/2),$$

则 Jacobi 行列式为  $2\sqrt{t_1(t_2 - t_1)}\rho$ , 上式即为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi \sqrt{t_1(t_2 - t_1)}} \int_{\arctan \sqrt{\frac{t_1}{t_2 - t_1}}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{\frac{t_1}{t_2 - t_1}} \right) = 1 - \frac{2}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{t_1}{t_2 - t_1}}, \end{aligned}$$

而

$$\arctan \sqrt{\frac{t_1}{t_2 - t_1}} = \arcsin \sqrt{\frac{t_1}{t_2}},$$

$$\therefore \quad \mathbb{P}(0(t_1, t_2)) = 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{t_1}{t_2}}.$$



严格地说,

粗糙轨道:

如果一个连续函数

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ 的图像曲线}$$

在任何一个区间上的长度都是无穷, 则称该函数的轨道是粗糙的.

注. 如果  $f$  在任何一段区间上是光滑 (连续可导) 的, 那么它在这一段上的长度必然是有限的.

轨道粗糙意味着它没有任何一段是光滑的.



## 曲线的长度

假设  $f$  是  $[a, b]$  上连续函数,

$\ell(f)$ : 图像  $\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$  的长度.

$D = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$ :  $[a, b]$  的一个划分, 由三角不等式

$$\begin{aligned}\ell(f) &\geq \sum_D [(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2]^{1/2} \\ &\geq \sum_D |f(t_i) - f(t_{i-1})| \\ &=: V^D(f) \quad (: f \text{ 在 } D \text{ 上的变差}).\end{aligned}$$



对所有的划分  $D$  取上确界, 称

$$V(f) := \sup_D V^D(f) : f \text{ 的全变差.}$$

有

$$V(f) \leq \ell(f).$$

长度无法定义, 而全变差是有严格定义的,

把函数的粗糙理解为它在任何区间上的全变差是无穷.



Brown 运动的(几乎所有)轨道是连续的.

定义  $\{B_t\}$  在区间  $[a, b]$  的划分  $D$  上变差为

$$V^D(B) = \sum_D |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|,$$

它是一个随机变量, 要证明它几乎处处趋于无穷.

注.  $\mathbb{E}|B_{t_i} - B_{t_{i-1}}| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{t_i - t_{i-1}}$ . 推出

$$\mathbb{E}[V(B)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \lim_{m(D) \rightarrow 0} \sum_D \sqrt{t_i - t_{i-1}} = \infty,$$

其中  $m(D) = \max_i (t_i - t_{i-1})$ . (这不能推出  $V(B) = \infty$  a.s.)



引入函数的二次变差:

$$V_2^D(f) := \sum_D (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2.$$

注. 由于

$$\begin{aligned} V_2^D(f) &\leq \max_D |f(t_i) - f(t_{i-1})| \cdot V^D(f) \\ &\leq \max_D |f(t_i) - f(t_{i-1})| \cdot V(f). \end{aligned}$$

若  $V(f) < \infty$ , 则任取一趋于 0 的划分列  $\{D_n\}$ , 因为函数连续, 故

$$\lim_n \max_{D_n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = 0 \quad (:\text{一致连续}).$$

因此推出  $V_2^{D_n}(f) \rightarrow 0$ .



## 逆否命题:

若存在一个趋于零的划分列  $\{D_n\}$  有

$$\lim_n V_2^{D_n}(f) > 0,$$

则  $f$  的变差  $V(f) = \infty$ .

把  $\{B_t\}$  在区间  $[a, b]$  上关于划分  $D$  的二次变差写为

$$V_2^D(B) := \sum_D (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2,$$

其中  $B(t) = B_t$ . 这是一个依赖于  $D$  的随机变量, 下面证明

$$\mathbb{E}[V_2^D(B)] = b - a,$$

$$\mathbb{E}[V_2^D(B) - (b - a)]^2 = 2 \sum_D (t_i - t_{i-1})^2.$$



## 引理 7.5.1

设  $D = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$  是区间  $[0, t]$  的有限划分,

$$V_2^D = \sum_{l=1}^n |B_{t_l} - B_{t_{l-1}}|^2: \text{ 称为 } B \text{ 在分划 } D \text{ 上的二次变差,}$$

那么

$$\mathbb{E} V_2^D = t,$$

$$\mathbb{E} \left\{ \left( V_2^D - \mathbb{E} V_2^D \right)^2 \right\} = 2 \sum_{l=1}^n (t_l - t_{l-1})^2.$$



事实上,

$$\mathbb{E} V_2^D = \sum_{l=1}^n \mathbb{E} |B_{t_l} - B_{t_{l-1}}|^2 = \sum_{l=1}^n (t_l - t_{l-1}) = t .$$

为证明第二个公式, 先计算

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \left( V_2^D - \mathbb{E} V_2^D \right)^2 \right\} &= \mathbb{E} \left\{ \left( \sum_{l=1}^n |B_{t_l} - B_{t_{l-1}}|^2 - t \right)^2 \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \left( \sum_{l=1}^n (|B_{t_l} - B_{t_{l-1}}|^2 - (t_l - t_{l-1})) \right)^2 \right\} \\ &= \sum_{k,l=1}^n \mathbb{E} (|B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^2 - (t_k - t_{k-1})) (|B_{t_l} - B_{t_{l-1}}|^2 - (t_l - t_{l-1})), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{上式} &= \sum_{l=1}^n \mathbb{E} (|B_{t_l} - B_{t_{l-1}}|^2 - (t_l - t_{l-1}))^2 \\ &+ \sum_{k \neq l} \mathbb{E} (|B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^2 - (t_k - t_{k-1})) (|B_{t_l} - B_{t_{l-1}}|^2 - (t_l - t_{l-1})). \end{aligned}$$

因为不同区间的增量是独立的, 上式第二项为 0, 故

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (V_2^D - \mathbb{E} V_2^D)^2 &= \sum_{l=1}^n \mathbb{E} (|B_{t_l} - B_{t_{l-1}}|^2 - (t_l - t_{l-1}))^2 \\ &= \sum_{l=1}^n \mathbb{E} \{ |B_{t_l} - B_{t_{l-1}}|^4 - 2(t_l - t_{l-1})|B_{t_l} - B_{t_{l-1}}|^2 + (t_l - t_{l-1})^2 \} \\ &= \sum_{l=1}^n \{ \mathbb{E} |B_{t_l} - B_{t_{l-1}}|^4 - 2(t_l - t_{l-1})\mathbb{E} |B_{t_l} - B_{t_{l-1}}|^2 + (t_l - t_{l-1})^2 \} \\ &= 2 \sum_{l=1}^n (t_l - t_{l-1})^2 \quad (\because \mathbb{E} |B_{t_l} - B_{t_{l-1}}|^4 = 3(t_l - t_{l-1})^2). \end{aligned}$$



BM 几乎所有的样本轨道在任何有界区间上都不是有界变差的.

### 定理 7.5.1

设  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  是一维标准 Brown 运动,  $D$  是区间  $[0, t]$  上的有限分划, 且

$$m(D) = \max_l |t_l - t_{l-1}|,$$

则对任何  $t > 0$ ,

$$\lim_{m(D) \rightarrow 0} V_D = t \quad \text{in } L^2(\Omega, \mathbb{P}),$$

也有 
$$\lim_{m(D) \rightarrow 0} V_D = t \quad \text{in probability.}$$



证. 基于前面的引理, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left| \sum_l |B_{t_l} - B_{t_{l-1}}|^2 - t \right|^2 &= \mathbb{E} \left| V_2^D - \mathbb{E} \left( V_2^D \right) \right|^2 \\ &= 2 \sum_{l=1}^n (t_l - t_{l-1})^2 \\ &\leq 2m(D) \sum_{l=1}^n (t_l - t_{l-1}) \\ &= 2tm(D),\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{m(D) \rightarrow 0} \mathbb{E} \left| \sum_l |B_{t_l} - B_{t_{l-1}}|^2 - t \right|^2 = 0.$$



上面的收敛是依概率收敛. 但若定理中的分划取得更好的话, 收敛性可以变成是几乎处处的.

命题:

设  $(B_t)_{t \geq 0}$  是一维标准 Brown 运动. 那么对任何  $t > 0$ , 当  $n$  趋于无穷时, 有

$$\sum_{j=1}^{2^n} \left| B_{\frac{j}{2^n}t} - B_{\frac{j-1}{2^n}t} \right|^2 \rightarrow t \quad \text{a.s.} \quad (1)$$



证. 设  $D_n$  是  $[0, t]$  上的二分点分划

$$D_n = \{0 = \frac{0}{2^n}t < \frac{1}{2^n}t < \cdots < \frac{2^n}{2^n}t = t\}.$$

且用  $V_n$  表示  $V_{D_n}$ . 那么, 按上面的引理  $\mathbb{E} V_n = t$  且

$$\begin{aligned}\mathbb{E} |V_n - \mathbb{E} V_n|^2 &= 2 \sum_{l=1}^{2^n} \left( \frac{l}{2^n}t - \frac{l-1}{2^n}t \right)^2 \\ &= 2^{n+1} \left( \frac{1}{2^n}t \right)^2 = \frac{1}{2^{n-1}}t^2.\end{aligned}$$

因此由 Markov 不等式,

$$\begin{aligned}\mathbb{P} \left\{ |V_n - \mathbb{E} V_n| \geq \frac{1}{n} \right\} &\leq n^2 \mathbb{E} |V_n - \mathbb{E} V_n|^2 \\ &= \frac{n^2}{2^{n-1}}t^2\end{aligned}$$



故而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left\{ |V_n - \mathbb{E} V_n| \geq \frac{1}{n} \right\} = t^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}} < +\infty .$$

这样由 Borel-Cantelli 引理得

$$V_n \rightarrow t \text{ 几乎处处收敛.}$$



定理的直观解释:

区间上一个非有界变差的连续函数的图像曲线一定无限长.

这对于一个物理粒子的运动轨迹是不可能的.



♡ ~ The End ~ ♡

